

# משוואות דיפרנציאליות

## פרק 1 - משוואות מסדר ראשון

### תוכן העניינים

1.	מבוא .....
1	2. הפרדת משתנים .....
3	3. משוואה הומוגנית .....
5	4. משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$ .....
6	5. משוואה לינארית מסדר ראשון .....
8	6. משוואת ברנולי .....
9	7. הצבות שונות ומשונות .....
10	8. משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקارد .....
13	9. פתרונות גרפיים ונוסריים למשוואת מסדר ראשון .....

## הפרדת משתנים

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(y \neq 0) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (1)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (2)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (3)$$

$$y(2) = 1 ; \quad (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (4)$$

$$y(1) = -1 ; \quad \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (5)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (6)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (8)$$

$$y(\pi) = 1 ; \quad y' + y^2 \sin x = 0 \quad (9)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y(0) = 5 ; \quad \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (10)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (11)$$

### תשובות סופיות

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{\ln|1-x|-c}, \quad y=0 \quad (2)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \ln|y| = \ln|x-1| \quad (4)$$

$$\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 \quad (5)$$

$$y = 2 \pm \sqrt{(x-1)^2 + k} \quad (6)$$

$$y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (7)$$

$$x = 1 + \tan(t+c) \quad (8)$$

$$y = -\frac{1}{\cos x} \quad (9)$$

$$\ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (10)$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5 \quad (11)$$

## משואה הומוגנית

### שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-8 :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2dy = 0 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (2)$$

$$y^2 + x^2y' = xyy' \quad (3)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$\left( x - y \cos \frac{y}{x} \right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (5)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}} \quad (6)$$

$$y(1) = 0 ; \left( y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx - x dy = 0 \quad (7)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (8)$$

$$(y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 \quad (9)$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע  $n$ , על מנת שהמשואה תהיה הומוגנית?

ב. פתרו את המשואה עבור הערך של  $n$  שנמצא בסעיף א.

### תשובות סופיות

$$-\ln|x| = \frac{1}{6} \ln \left| 2 \left( \frac{y}{x} \right)^3 + 1 \right| + c, \quad y = -\frac{x}{2^{1/3}} \quad (1)$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} \ln \left| \left( \frac{y}{x} \right) - 1 \right| - \frac{5}{4} \ln \left| \left( \frac{y}{x} \right) + 3 \right| + c, \quad y = x, \quad y = -3x \quad (2)$$

$$-\ln|x| = \ln \left| \left( \frac{y}{x} \right) - \left( \frac{y}{x} \right) + c, \quad y = 0 \quad (3)$$

$$-\ln|x| = \frac{1}{4} \ln \left| 2 \left( \frac{y}{x} \right)^2 + 4 \right| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x \quad (4)$$

$$\ln|x| = -\sin \left( \frac{y}{x} \right) + c \quad (5)$$

$$\ln \left( 1 + e^{\left( \frac{x}{y} \right)^2} \right) = \ln|y| + c, \quad y = 0 \quad (6)$$

$$\ln x = \sinh^{-1} \left( \frac{x}{y} \right) + c \quad (7)$$

$$\ln|t| = -\frac{1}{2} \ln \left| \left( \frac{x}{t} \right) - \left( \frac{x}{t} \right)^2 \right| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t \quad (8)$$

$$n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln \left( 1 + 2 \left( \frac{y}{x} \right)^2 \right) + c \quad (9)$$

## משואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+y+2} \quad (1)$$

$$(x+2y+3)dx + (2x+4y-1)dy = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4} \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3+x+2y}{1+x+y} \quad (4)$$

$$(2x+y-3)dx + (x+y-1)dy = 0 \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$x = \frac{1}{2}(x+y+1) + \frac{1}{4}\ln(2(x+y+1)+1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x - 1.5 \quad (1)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}-1\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}+1\right| + c, \quad y = x - 3, \quad y = -x - 1 \quad (2)$$

$$0 = 14y - (x+2y+3)^2 + k \quad (3)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{4}\left[-(2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right| + (-2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right|\right] + c \quad (4)$$

$$y = \sqrt{0.5}x - 2 - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5}x - 2 + \sqrt{0.5}$$

$$\ln|x-2| = \frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2} + \left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right) + c \quad (5)$$

## משוואות ליניאריות מסדר ראשון

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2)$$

$$(x > 2) \quad (x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad x^3y' + (2 - 3x^2)y = x^3 \quad (4)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$(\sin x > 0) \quad \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6)$$

$$(\sin x > 0) \quad y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

$$z(\pi) = 0 ; \quad x^2z' + 2xz = \cos x \quad (8)$$

$$ydx = (2x + y^3)dy \quad (9)$$

### תשובות סופיות

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[ \frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) [x^2 - 4x + C] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} [-5e^{\cos x} + C] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x [-\cot x + C] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

$$x(y) = y^2(y+c) \quad (9)$$

## משוואת ברנולי

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (3)$$

$$y(1) = 2.5 ; \quad y' - \left( \frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (4)$$

$$(\sin x \neq 0) \quad z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}} \quad (1)$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y = x^2 \left( \frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (3)$$

$$y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e} \quad (4)$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}} \quad (5)$$

## הצבות שונות ומשונות

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y' = \cos(y-x) \quad (1)$$

$$y' = \frac{2y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x^2}\right); \quad y(1) = 0 \quad (2)$$

$$y' - x^2 y + y^2 = x - \frac{x^4}{4}, \quad y(0) = 1 \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$-\frac{1}{\sin z} + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\sin z}{1-\sin z}\right) \quad (2)$$

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x+1} \quad (3)$$

## משפט הקיום והיחidot על שם פיאנו ופיקארד

### שאלות

1) נתונה הבעיה  $y(2) = -1$ ,  $y' = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + y}$

- א. הוכחו ש-  $y_1(x) = -x + 1$ ,  $y_2(x) = -\frac{1}{4}x^2 + y$  הם פתרונות לבעיה.

קבעו באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.  
ב. הסבירו מדוע קיומם שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

2) נתונה הבעיה  $y(0) = 0$ ,  $y' = \sqrt[3]{y} + 4$ .

- א. הוכחו שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.  
ב. הוכחו שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.  
ג. הוכחו שלבעיה קיימים פתרון יחיד, ומצאו אותו.

3) פתרו את הבעיה  $y(4) = 0$ ,  $y' = (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + x^2 \sin y$

4) נתונה הבעיה  $y(0) = 4$ ,  $y' = (y-1)(x^2 + y)^5$ .

- א. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.  
ב. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

5) נתונה המד"ר  $dy = (2x + y^3)dx$ .

- א. הראו שעבור  $x = y$  המד"ר ליניארית מסדר ראשון, ופתרו אותה ככזאת.

ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית, מהן נקודות ההתחלה  $(x_0, y_0)$ , כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד, העובר דרך  $(x_0, y_0)$ .

צטוואו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.

מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך  $(x_0, y_0)$ ?

6) נתונה בעיית ההתחלה  $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$

א. מצאו 3 קירובי פיקارد לפתרון הבעיה.

ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר  $n$  (הוכחו באינדוקציה).

ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר  $n$  מתכנס לפתרון כאשר  $\infty \rightarrow n$ .

7) כמה פתרונות יש בעיית ההתחלה  $\begin{cases} y' = \frac{1}{x} |\sin y| \\ y(1) = \pi \quad ? \quad (x > 0) \end{cases}$

8) נתונה בעיית התחלאה  $\begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

9) נתונה בעיית התחלאה  $\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

10) הראו כי לבעיה  $\begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$  יש פתרון יחיד על כל הישר המשמי.

11) הראו כי לבעיה  $\begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$  יש פתרון יחיד על כל הישר המשמי.

12) הראו כי לבעיה  $\begin{cases} y' = xye^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$  יש פתרון יחיד על כל הישר המשמי.

### תשובות סופיות

- ב. שאלת הסבר.  
ג. שאלת הוכחה.
- א. שאלת הוכחה.  
ב. שאלת הוכחה.
- א. שאלת הוכחה.  
ב. שאלת הוכחה.  
ג. שאלת הוכחה.
- $y(x) = 0$
- א. שאלת הוכחה.  
ב. שאלת הוכחה.
- א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.  
ב. כל נקודת התחליה  $(x_0, y_0)$ , שverbora  $\neq 0$ .
- הקטע הארוך ביותר:  $(0, \infty)$  או  $(-\infty, 0)$ .
- $y_0(x) = 1, \quad y_1(x) = 1 + x^2, \quad y_2(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!}, \quad y_3(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}$ .  
א.  $y_n(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}$   
ב. הוכחה.
- א. אחד.  
ב.  $[0, 1]$   
ג. הוכחה.
- א.  $[-0.1, 0.1]$   
ב.  $[-0.08, 0.08]$   
ג. הוכחה.
- א.  $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$   
ב.  $[-0.5, 0.5]$   
ג. הוכחה.
- א.  $(0, 1)$  הוכחה.  
ב.  $(1, 0)$  הוכחה.  
ג.  $(2, 0)$  הוכחה.

## פתרונות גרפים ונומריים למשואה מסדר ראשון

### שאלות

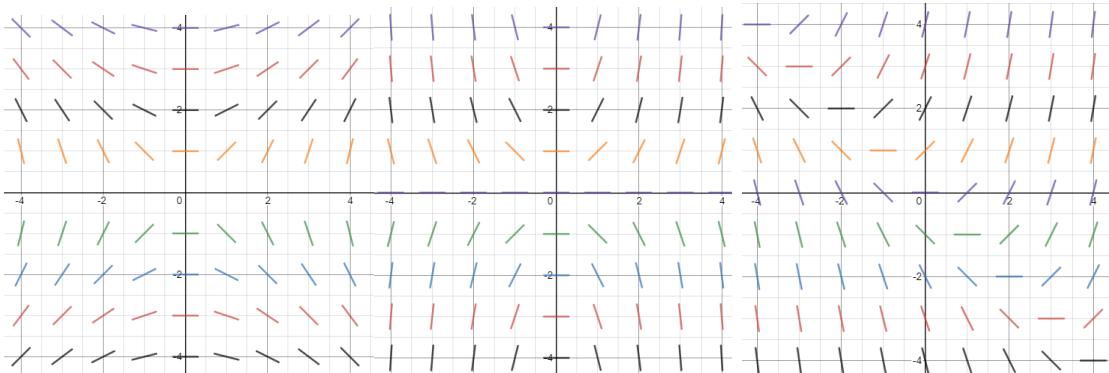
1) שרטטו שדה כיוונים למשואה הדיפרנציאלית  $y' = 2y - x$ .

2) התאימו כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א-ג' לשדה הכוונים שלה:

א.  $y' = \frac{x}{y}$

ב.  $y' = xy$

ג.  $y' = x + y$



איור 3

איור 2

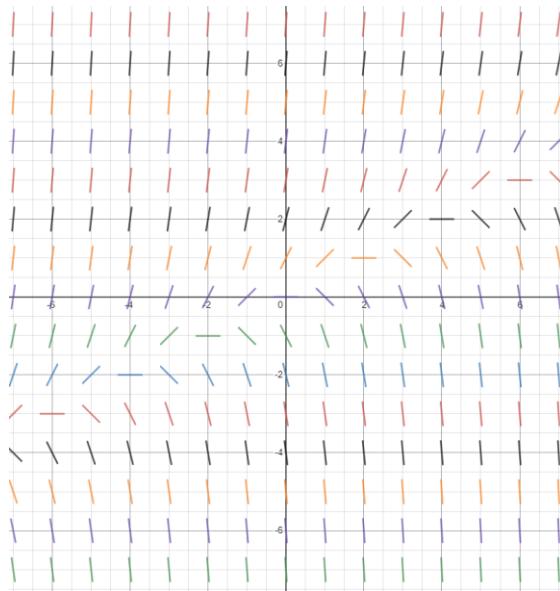
איור 1

3) נתונה המש"ר  $y' = y - x$ ,  $y(0) = 2$

מצאו בקירוב את  $y(1)$  בעזרת שיטת אוילר עם  $h = 0.1$ .

4) נתונה המש"ר  $y' = x + y$ ,  $y(1) = 2$

מצאו בקירוב את  $y(2)$  בעזרת שיטת אוילר עם  $h = 0.2$ .

**תשובות סופיות****(1)****(2)** איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

$$y(1) = 4.593 \quad \text{(3)}$$

$$y(2) = 6.95328 \quad \text{(4)}$$